Les nombres cachés 1

Y. Noël-Roch

1. Observation

Dans un tableau de 12 lignes et de 15 colonnes, nous avons écrit les premiers éléments de $\mathbb{N}^*$ ([1])

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45
46	47	48	49	50	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70	71	72	73	74	75
76	77	78	79	80	81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100	101	102	103	104	105
106	107	108	109	110	111	112	113	114	115	116	117	118	119	120
121	122	123	124	125	126	127	128	129	130	131	132	133	134	135
136	137	138	139	140	141	142	143	144	145	146	147	148	149	150
151	152	153	154	155	156	157	158	159	160	161	162	163	164	165
166	167	168	169	170	171	172	173	174	175	176	177	178	179	180

Tableau 1 ($L = 15$)

- Si on ajoute cinq lignes en bas de ce tableau, quel est le nombre qui occupe la dernière case (en bas à droite) du tableau complété ?
- Marque de rouge toutes les cases contenant un multiple de 3. Observe leur position :
  - dans une ligne
  - d'une ligne aux suivantes
- Quelles sont les valeurs de a pour lesquelles les cases contenant les multiples de a forment une (ou des) colonne(s) dans le tableau ? Comment expliquer ces « régularités » ?
- Marque de vert toutes les cases contenant un multiple de 4 et observe leur position.
- Quelles sont les valeurs de a pour lesquelles les cases contenant un multiple de a forment des « escaliers du même genre » ?. Nous parlerons d'« escaliers descendants » pour les multiples de 4 et d'« escaliers montants » pour les multiples de 7.
- Marque de bleu toutes les cases contenant un multiple de 10. Tu constates que les « escaliers » ne sont pas toujours facilement perceptibles mais que la périodicité se manifeste toujours lorsqu'on représente l'ensemble des multiples d'un nombre a dans le tableau.

1. $\mathbb{N}^*$ désigne l'ensemble des naturels non nuls, c'est-à-dire $\{1, 2, 3\ldots\}$

Math-Jeunes n° 95, 8–12, 2000

— Imagine cinq lignes ajoutées au bas du tableau 1, sans que les nombres soient écrits dans les cases.

181														
														255

Sans écrire les nombres, repère par une croix toutes les cases occupées par un multiple de 5. Repère d'une autre façon toutes les cases occupées par un multiple de 8.

2. Préparation du jeu

— Choisissons aléatoirement deux nombres (naturels non nuls) différents a et b compris entre 3 et 10. Dans le tableau 1, entourons d'un disque tous les multiples de a, entourons d'un carré tous les multiples de b.
Voici par exemple le résultat lorsque $a = 6$ et $b = 7$

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45
46	47	48	49	50	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70	71	72	73	74	75
76	77	78	79	80	81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100	101	102	103	104	105
106	107	108	109	110	111	112	113	114	115	116	117	118	119	120
121	122	123	124	125	126	127	128	129	130	131	132	133	134	135
136	137	138	139	140	141	142	143	144	145	146	147	148	149	150
151	152	153	154	155	156	157	158	159	160	161	162	163	164	165
166	167	168	169	170	171	172	173	174	175	176	177	178	179	180

Tableau 2 ($L = 15, a = 6, b = 7$)

— Les nombres sont effacés, le « remplissage » des cases uniformisé et une fenêtre 10×10 est placée aléatoirement sur le tableau 2 à partir de la 1re ou de la 2e ligne. Ici par exemple, c_2^2 (2) est pris comme coin supérieur gauche de la fenêtre.

2. c_k^n désigne soit la case située à l'intersection de la n^e ligne et de la k^e colonne d'un tableau, soit le nombre qui y est caché.

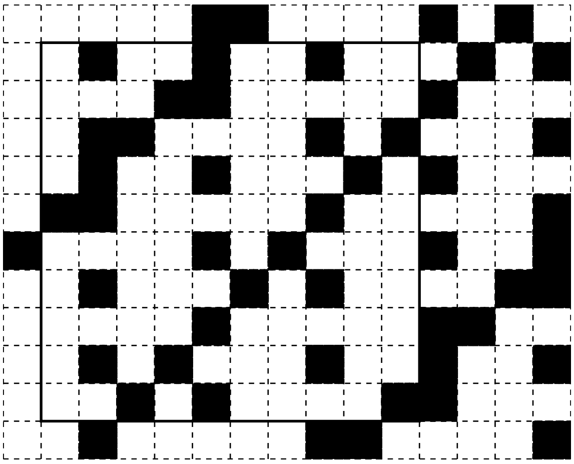
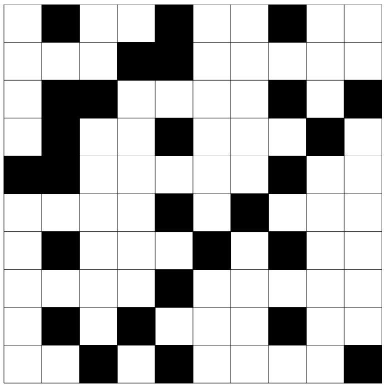


Tableau 3 ($L = 15, a = 6, b = 7$)

— enfin tout ce qui déborde de la fenêtre est effacé.

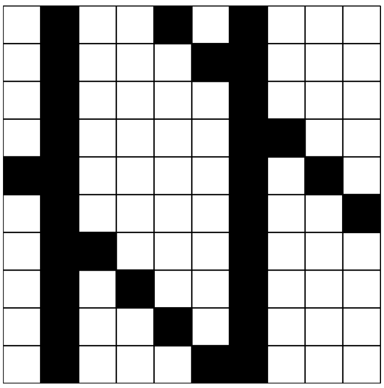


Fenêtre 1 ($L = 15$)

Le jeu : En ne disposant que de la fenêtre et sachant que $L = 15$, $3 \leqslant a \leqslant 10$, $3 \leqslant b \leqslant 10$ et $a \neq b$, retrouver les deux nombres a et b dont les multiples occupent les cases noires.

3. Premier jeu

La fenêtre ci-contre a été construite de la façon qui vient d'être indiquée mais a et b ne valent plus nécessairement 6 et 7. Tu sais que $L = 15$, $a \neq b$, $3 \leqslant a \leqslant 10$, $3 \leqslant b \leqslant 10$. Peux-tu trouver a et b ?

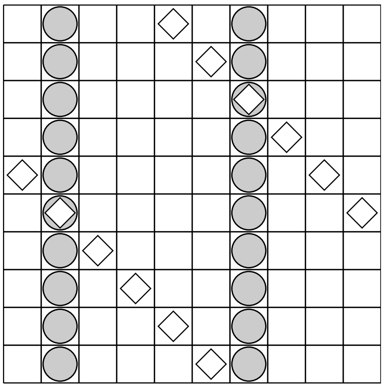


Si tu n'y vois rien immédiatement, reporte-toi aux observations du paragraphe 1 … des colonnes, des escaliers te feront découvrir des régularités !

Fenêtre 2 ($L = 15$)

Note tes valeurs de a et b avant de poursuivre ta lecture.

Tu as peut-être l'oeil perspicace ? Auquel cas tu auras repéré la périodicité qui apparaît dans la fenêtre 2 pour distinguer les multiples de a et les multiples de b.



Si c'est le cas tu as « vu » que $a = 5$ et $b = 8$. Mais comment trouver la réponse si tu ne distingues pas les deux familles ? Nous donnons ci-dessous **deux** analyses possibles de la fenêtre 2. Il y en a bien d'autres !

3.1. Première analyse

Supposons que nous ne voyons rien globalement et observons seulement la première ligne de la fenêtre 2 :

— c_2^1 et c_5^1 pourraient induire $a = 3$. Mais alors, c_8^1 devrait être noire. Les deux cases c_2^1 et c_5^1 contiennent donc l'une un multiple de a, l'autre un multiple de b. Comme $a > 2$ et $b > 2$, c_5^1 et c_7^1 contiennent également l'une un multiple de a et l'autre un multiple de b. Il faut donc que c_2^1 et c_7^1 contiennent des multiples du même nombre. Cela nous donne $\boxed{a = 5}$. Dès lors, $\boxed{2}$ et $\boxed{7}$ cachent des multiples de 5. (3)

— La deuxième « famille » apparaît dès lors dans la fenêtre 2 en « escaliers descendants » et deux cases apparentées en $\boxed{\;5\;}$ complètent la résolution : $\boxed{b = 8}$. (4)
Nous te laissons le soin de rechercher l'emplacement de la fenêtre 2 dans le tableau 1.

3.2. Deuxième analyse

— Si ton attention a d'abord été attirée par la 2e colonne, tu as pu déduire que a doit être un diviseur de 15. Comme $3 \leqslant a \leqslant 10$, tu penses alors que $a = 3$ ou $a = 5$. Mais a ne peut valoir 3 puisque $\boxed{2}$, $\boxed{5}$ et $\boxed{8}$ devraient être entièrement noires. Tu peux donc affirmer que $\boxed{a = 5}$.

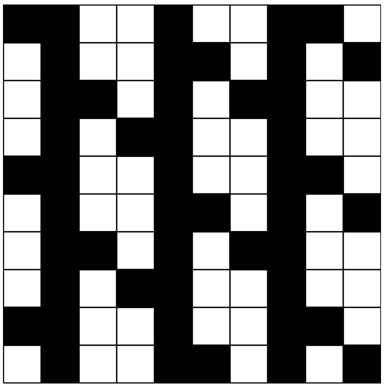
— La valeur de b peut ensuite être découverte comme dans l'analyse précédente.

4. Autres jeux

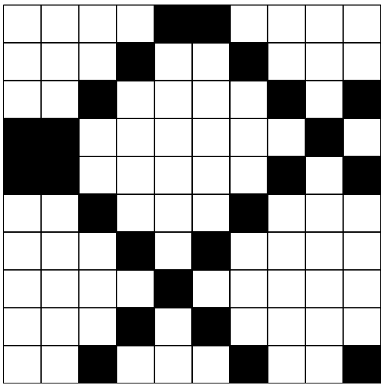
A toi maintenant ! Les fenêtres 3, 4 et 5 ont été découpées dans le tableau 1 ($L = 15$). Dans chaque cas, que valent a et b ; quel nombre occupait le coin supérieur gauche à la fenêtre ?

3. $\boxed{n}$ désigne la n^e colonne d'une fenêtre.

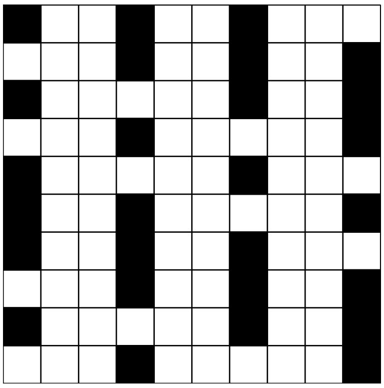
4. $\boxed{\;n\;}$ désigne la n^e ligne d'une fenêtre.



Fenêtre 3



Fenêtre 4



Fenêtre 5

Suite au prochain numéro . . . Bon courage ! Bon amusement !