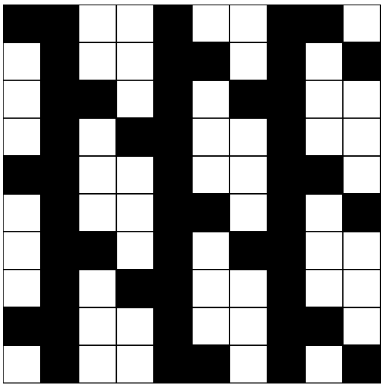
Les nombres cachés 2

Y. Noël-Roch

Math-Jeunes n° 96, 26–29, 2001

1. Solution

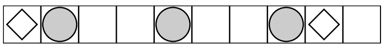
Voici d'abord les solutions des fenêtres 3, 4 et 5 proposées dans le numéro précédent.



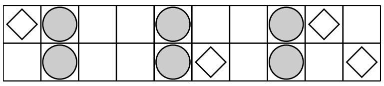
$a = 3$
$b = 4$
Coin supérieur gauche de la fenêtre $csg = 20$.

Fenêtre 3

Nous devinons $\boxed{a = 3}$ en remarquant $\boxed{2}$, $\boxed{5}$, et $\boxed{8}$. Les trente cases de ces trois colonnes ne peuvent pas appartenir à la même famille que c_1^1 et c_9^1. Ces deux cases sont donc occupées par des multiples de b.



Ainsi la première ligne peut induire $b = 8$. Mais observons à la fois $\boxed{1}$ et $\boxed{2}$.

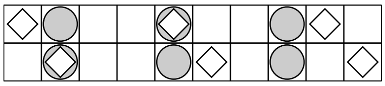


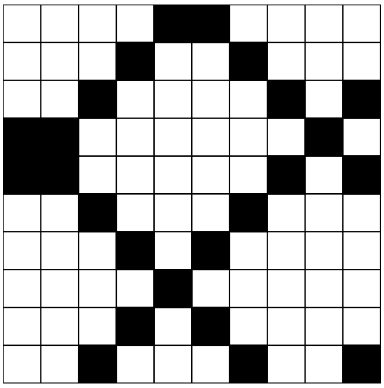
$\boxed{2}$ impose $b = 4$ … et cela n'est pas contredit par $\boxed{1}$ à condition que c_5^1 soit occupé **à la fois** par un multiple de a **et** de b.

La double appartenance $c_5^1 \in a\mathbb{N}^*$ ([1]) et $c_5^1 \in b\mathbb{N}^*$ est d'ailleurs suggérée d'une part par les colonnes, d'autre part par les escaliers descendants mais il faut pour cela observer **globalement** la fenêtre 3.

Nous connaissons l'**interprétation exacte** des deux premières lignes :

1. $a\mathbb{N}^*$ désigne l'ensemble des multiples naturels non nuls de a, c'est-à-dire $\{a, 2a, 3a \ldots\}$. $c_5^1 \in a\mathbb{N}^*$ signifie que le nombre caché dans la case commune à la 1re ligne et la 5e colonne est un multiple non nul de a.



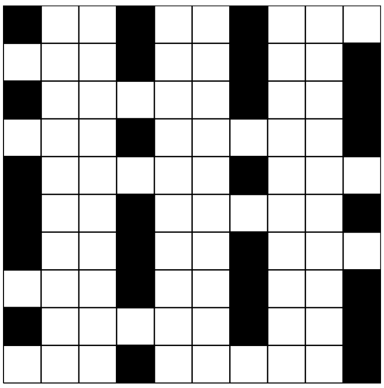


$a = 7$
$b = 8$
$csg = 3$
Globalement, 8 peut être repéré dans les « escaliers descendants » et 7 dans les « escaliers montants ».

Fenêtre 4

Mais globalement, $\boxed{4}$ montre que $a > 6$ et $b > 6$.

Dans la troisième ligne, c_8^3 ne peut être ni de la même famille que c_3^3, ni de la même famille que c_{10}^3. Donc c_3^3 et c_{10}^3 contiennent tous les deux des multiples du même nombre et $\boxed{a = 7}$.
$\boxed{5}$ livre alors $c_1^5 \in 7\mathbb{N}^*$ et $c_8^5 \in 7\mathbb{N}^*$. Il reste c_2^5 et c_{10}^5 qui sont nécessairement associés, donc $\boxed{b = 8}$.



$a = 6$
$b = 9$
$csg = 6$
$\boxed{1}$ entraîne $a \neq 3$ puisque c_{10}^1 n'est pas noire. Il faut donc que c_1^1 et c_7^1 soient dans la même famille, donc $\boxed{a = 6}$.

Fenêtre 5

Dans $\boxed{9}$, $c_{10}^9 \notin 6\mathbb{N}^*$ ([2]) puisque c_4^9 n'est pas noire. D'autre part, c_{10}^9 et c_7^9 ne peuvent appartenir à la même famille. Donc c_{10}^9 et c_1^9 sont occupées par des multiples de b et $\boxed{b = 9}$.

2. Tableau initial de largeur L variable

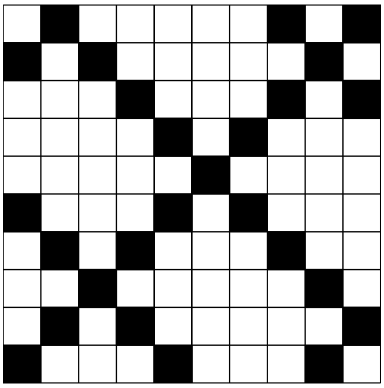
Jusqu'ici, les fenêtres étaient découpées dans le tableau 1 pour lequel $L = 15$. Dans la suite, nous utilisons des **tableaux initiaux de largeur L aléatoire** avec $10 \leqslant L \leqslant 20$.

Rappelons les conditions :

$$\boxed{10 \leqslant L \leqslant 20, \quad 3 \leqslant a \leqslant 10, \quad 3 \leqslant b \leqslant 10,\ a \neq b}$$

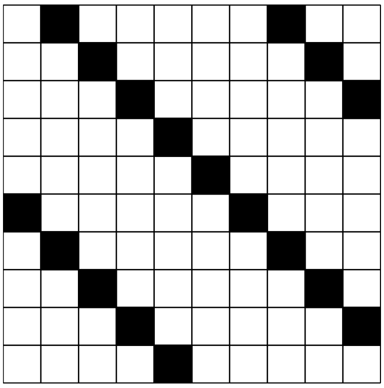
Recherche les valeurs de a, b, et L qui ont permis d'obtenir la fenêtre suivante :

2. $c_{10}^9 \notin 6\mathbb{N}^*$ signifie que le nombre caché dans la case commune à la 9ᵉ ligne et la 10ᵉ colonne n'est pas un multiple naturel non nul de 6.



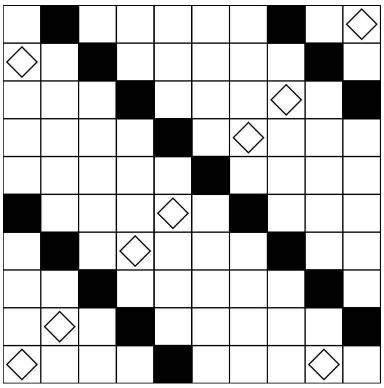
Fenêtre 6

Dès la première ligne, nous pensons à 6 ou 8 ? 6 et 8 ? $a = 6$ est très plausible si nous associons c_2^1 à c_8^1, c_3^2 à c_9^2, c_4^3 à c_{10}^3 … et plus globalement les « escaliers descendants » de la fenêtre 6.



Connaissant $a = 6$, le décalage d'une ligne à la suivante indique que $L \in 6\mathbb{N}^* - 1$. ([3]) (Il manque une case par ligne pour que les multiples de 6 se placent en colonnes). Comme $10 \leqslant L \leqslant 20$, L peut valoir 11 ou 17 à ce stade de l'analyse.

Observons les autres cases hachurées :



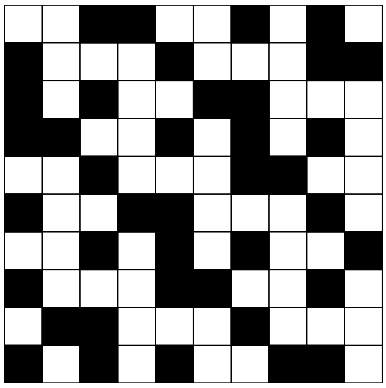
La périodicité implique que **toute** la diagonale montante est occupée par des multiples de b. Ainsi $c_9^2 \in b\mathbb{N}^*$ donc c_1^2 et c_9^2 appartiennent à la même famille : $c_1^2 \in b\mathbb{N}^*$ et $c_9^2 \in b\mathbb{N}^*$, donc $b = 8$.
Le décalage des multiples de 8 d'une ligne à la suivante montre que $L \in 8\mathbb{N}^* + 1$.

Les conditions $L \in 6\mathbb{N}^* - 1$, $L \in 8\mathbb{N}^* + 1$ et $10 \leqslant L \leqslant 20$ imposent $L = 17$. Si cela t'amuse, tu peux enfin déterminer le contenu du coin supérieur gauche de la fenêtre : c'est le nombre 23.

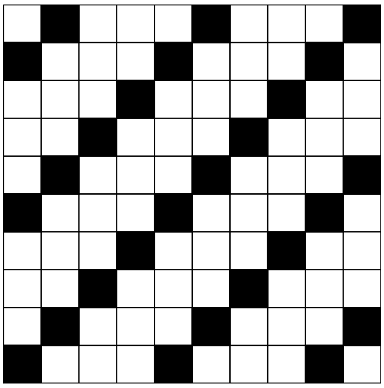
3. $6\mathbb{N}^* - 1$ désigne l'ensemble des multiples non nuls de 6 diminués de 1, c'est-à-dire $\{5, 11, 17, 23, \ldots\}$.

3. Des jeux !

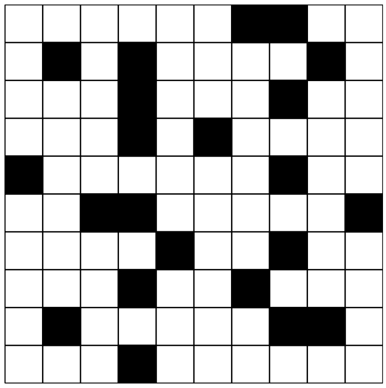
Sachant que : $10 \leqslant L \leqslant 20$ et
$3 \leqslant a \leqslant 10$ et
$3 \leqslant b \leqslant 10$ et
$a \neq b$,
détermine ces trois nombres dans chacune des situations suivantes.



Fenêtre 7



Fenêtre 8



Fenêtre 9

Bon courage … la suite au prochain numéro !