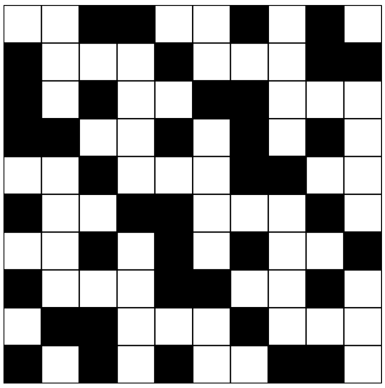
Les nombres cachés 3

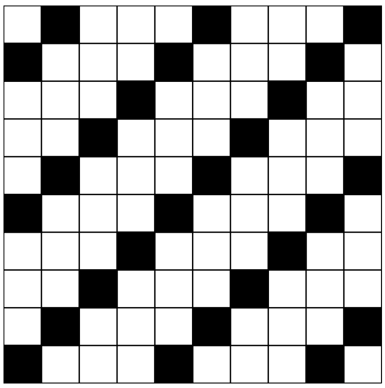
Y. Noël-Roch

1. Solutions



Fenêtre 7

Cette fenêtre proposée dans le numéro précédent de la revue est extraite d'un tableau initial de largeur 14. Les multiples de 4 et de 5 y ont été repérés et la fenêtre a été découpée en prenant la case occupée par le nombre 2 comme coin supérieur gauche.



Fenêtre 8

La fenêtre 8 est assez particulière : elle pourrait être obtenue en noircissant les cases contenant les multiples du seul nombre 4. Posons $a = 4$. Nous savons qu'un deuxième nombre $b \neq a$ a également été utilisé. Il faut donc que les cases contenant des multiples de b contiennent aussi des multiples de a.

En récapitulant, il faut : $\begin{cases} b\mathbb{N}^* \subset 4\mathbb{N}^* \quad (^1) \\ b \neq a = 4 \\ 3 \leqslant b \leqslant 10 \end{cases}$

Ces conditions entraînent $b = 8$. Dès lors nous connaissons $a = 4$ et $b = 8$.

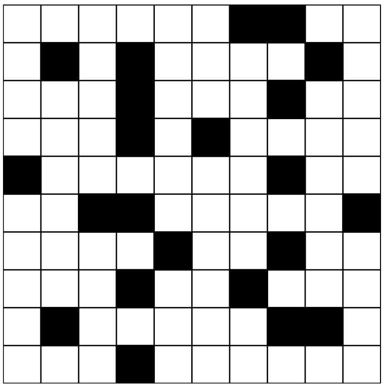
Enfin pour rechercher L, nous savons que $L \in 4\mathbb{N}^* + 1$ et $10 \leqslant L \leqslant 20$. L peut donc valoir 13 ou 17.

1. $X \subset Y$ signifie que tous les éléments de X sont des éléments de Y

Math-Jeunes nº 97, 54–58, 2001

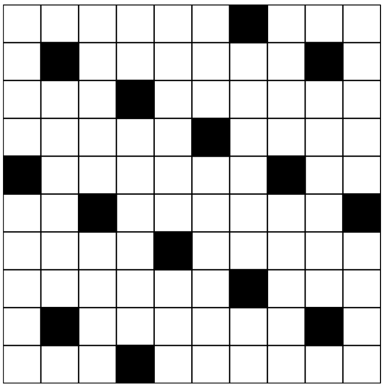
Tu peux contrôler que la fenêtre 8 a pu être construite avec

$a = 4$, $b = 8$, $L = 13$, $csg = 3$ (en partant de la 1re ligne)
$a = 4$, $b = 8$, $L = 13$, $csg = 15$ (2e ligne)
$a = 4$, $b = 8$, $L = 17$, $csg = 3$ (1re ligne)
$a = 4$, $b = 8$, $L = 17$, $csg = 7$ (1re ligne)
$a = 4$, $b = 8$, $L = 17$, $csg = 9$ (2e ligne)
$a = 4$, $b = 8$, $L = 17$, $csg = 23$ (2e ligne)

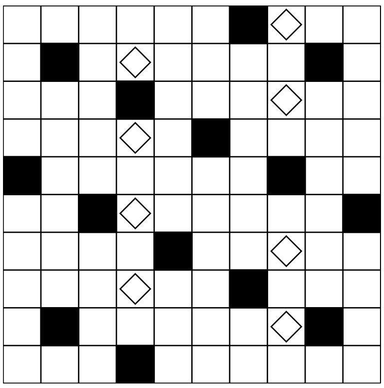


Fenêtre 9

Les deux familles de multiples n'apparaissent guère ! La succession de beaucoup de carrés blancs en $\boxed{\ 1\ }$ indique que a et b valent au moins 7. Dès lors, dans $\boxed{\ 2\ }$, c_2^2 et c_9^9 sont nécessairement associés, donc $a = 7$ et nous pouvons repérer les multiples de 7 dans la fenêtre, d'abord dans $\boxed{\ 5\ }$, $\boxed{\ 6\ }$ et puis dans toutes les lignes grâce à la périodicité.



Le décalage d'une ligne à la suivante indique que la largeur L du tableau initial vaut 2 de moins qu'un multiple de 7. Ainsi, $L \in 7\mathbb{N}^* - 2$ et $10 \leqslant L \leqslant 20$ entraînent que L vaut 12 ou 19. Continuons à exploiter les informations données par la fenêtre 9 :



La périodicité implique que toutes les cases $c_4^2, c_4^4, c_4^6, c_4^8, c_4^{10}, c_8^1, c_8^3, c_8^5, c_8^7, c_8^9$ sont occupées par des multiples de $b \geqslant 8$. Donc, on a $c_4^{10} \in 7\mathbb{N}^*$ et $c_4^{10} \in b\mathbb{N}^*$ et de même $c_8^5 \in 7\mathbb{N}^*$ et $c_8^5 \in b\mathbb{N}^*$.
Le décalage d'une ligne à la suivante impose $L \in b\mathbb{N}^* + 4$.

Les trois conditions : $\begin{cases} L \in \{12, 19\} \\ L \in b\mathbb{N}^* + 4 \\ 8 \leqslant b \leqslant 10 \end{cases}$ impliquent $\begin{cases} L \in \{12, 19\} \text{ et } L \in \{12, 20, 28, \ldots\} \text{ \underline{si} } b = 8 \\ L \in \{12, 19\} \text{ et } L \in \{13, 21, 29, \ldots\} \text{ \underline{si} } b = 9 \\ L \in \{12, 19\} \text{ et } L \in \{14, 24, 34, \ldots\} \text{ \underline{si} } b = 10 \end{cases}$

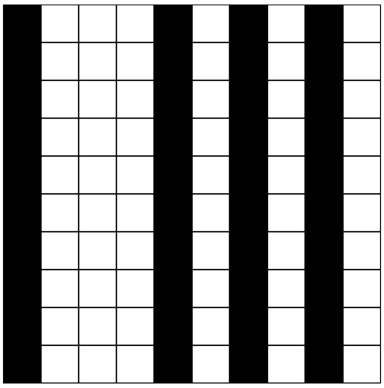
Toutes ces éventualités conduisent à une solution unique $L = 12$.

Nous connaissons donc $a = 7$, $b = 8$, et $L = 12$.

Si, de plus tu as recherché comment la fenêtre 9 a été découpée dans le tableau initial de largeur 12, tu as pu trouver 1 comme nombre caché dans le coin supérieur gauche.

2. Importance du triplet $\{a, b, L\}$

Observons une nouvelle fenêtre :



Fenêtre 10

Au premier coup d'œil, nous pouvons croire que $a = 4$ et $b = 6$. Une analyse approfondie montre que cela est incompatible avec l'ensemble des conditions connues. En effet, $a = 4$, et $b = 6$ entraînent $L \in 4\mathbb{N}^*$ et $L \in 6\mathbb{N}^*$. Comme nous savons que $10 \leqslant L \leqslant 20$, nous devrions avoir $L = 12$. Or, il est impossible de découper la fenêtre 10 dans un tableau initial (de largeur 12) suivant :

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
13	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...

Il faudrait en effet placer le coin supérieur gauche en 4 et nous ne disposerions pas de 10 colonnes vers la droite.

2.1. Analysons mieux le problème

— $\boxed{\quad 1 \quad}$ impose $a \geqslant 4$ et $b \geqslant 4$
— La disposition en colonnes imposent que a et b soient tous les deux diviseurs de L.
. . . et nous savons que $10 \leqslant L \leqslant 20$.
— Dressons un tableau des possibilités en tenant compte de toutes ces conditions :

L	Valeurs possibles pour a et b
10	–
11	–
12	4, 6 « solution » déjà exclue
13	–
14	–
15	–
16	4, 8
17	–
18	6, 9
19	–
20	4, 5, 10

L'éventualité $L = 16$, $a = 4$, et $b = 8$ est exclue par $\boxed{7}$.

L'éventualité $L = 18$, $a = 6$, et $b = 9$ est exclue parce qu'il faudrait associer $\boxed{1}$ à $\boxed{7}$,

et par conséquent $\boxed{5}$ à $\boxed{9}$, ce qui entraînerait $a = 4$ ou $b = 4$.

— Reste enfin $L = 20$, $a \in \{4, 5, 10\}$ et $b \in \{4, 5, 10\}$.

Aucune colonne ne peut cacher des multiples de 5 car :

$\boxed{1}$ est noire et $\boxed{6}$ ne l'est pas

$\boxed{5}$ est noire et $\boxed{10}$ ne l'est pas

$\boxed{7}$ est noire et $\boxed{2}$ ne l'est pas

$\boxed{9}$ est noire et $\boxed{4}$ ne l'est pas

La seule possibilité est donc $L = 20$, $a = 4$ et $b = 10$.
Enfin, pour le découpage de fenêtre dans le tableau de largeur 20, le coin supérieur gauche est 4.

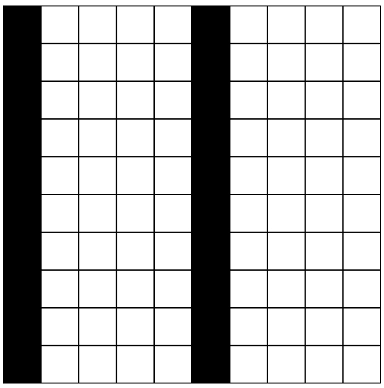
3. Astuces et particularités

— Le plus grand nombre de cases blanches consécutives visibles dans la fenêtre permet de réduire les possibilités pour a et b. Ainsi, dans la fenêtre 9, $\boxed{\quad 10 \quad}$ montre que $a \geqslant 7$ et $b \geqslant 7$.

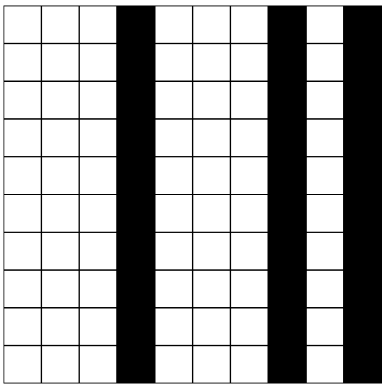
— Les fenêtres 2 et 3 présentent à la fois des « colonnes » et des « escaliers ». La fenêtre 10 présente 4 colonnes et rien d'autre.
Est-il possible, en respectant les conditions $3 \leqslant a \leqslant 10$, $3 \leqslant b \leqslant 10$ et $10 \leqslant L \leqslant 20$, d'obtenir une fenêtre 10×10 présentant :
   — exactement 3 colonnes noires et rien d'autre ?
   — exactement 2 colonnes noires et rien d'autre ?
   — 1 colonne noire et rien d'autre ?

— Une fenêtre peut conduire à plusieurs solutions. Construis un exemple. Essaie de répondre à ces questions avant de trouver des solutions dans la suite du texte.

Voici quelques fenêtres que tu peux décrypter pour les confronter à tes résultats.



Fenêtre 11



Fenêtre 12

4. Le plus grand commun diviseur de a et de b

— Si deux cases consécutives sont noires, elles sont nécessairement occupées l'une par un multiple de a et l'autre par un multiple de b.
Dans ce cas, il existe des naturels non nuls x et y tels que :

$$xa - yb = 1 \text{ ou } xb - ya = 1$$

Dans la fenêtre 1 par exemple : $7 \times 7 - 8 \times 6 = 1$
Cette situation se retrouve dans les fenêtres 1, 2, 3, 4, 7, et 9 dans lesquelles les paires $\{a, b\}$ valent respectivement $\{6, 7\}$, $\{5, 8\}$, $\{3, 4\}$, $\{7, 8\}$, $\{4, 5\}$ et $\{7, 8\}$.

— Au contraire, les fenêtres 5, 6, 8, 10, 11 et 12 ne présentent pas deux cases consécutives noires. Regardons les écarts les plus petits :

n° de fenêtre	$\{a, b\}$	d : écart minimum
5	$\{6, 9\}$	3
6	$\{6, 8\}$	2
8	$\{4, 8\}$	4
10	$\{4, 10\}$	2
11	$\{5, 10\}$	5
12	$\{4, 10\}$	2

Dans tous les cas, le nombre d est le plus grand commun diviseur de a et de b. Chaque fois, il existe un entier x et un entier y tels que :

$$\boldsymbol{xa + yb = d}$$

où $x, y \in \mathbb{Z}^*$ (2)

— Il est évident que tout diviseur commun à a et b est un diviseur de d. Cette propriété caractérise le fait que d est le plus grand commun diviseur de a et de b.
Si tu nous a suivi jusqu'ici, tu peux continuer à te documenter en recherchant des informations sur le **Théorème de Bézout**.

2. $\mathbb{Z}^*$ désigne l'ensemble des entiers non nuls, c'est-à-dire $\{1, -1, 2, -2, 3, -3, \ldots\}$.