



# Autopsie d'un jeu

Guy Noël

Mots clés : Jeu, permutation, retournement, groupe

Résumé : la brochure *Enseignons en jouant*, diffusée par la SBPMef est accompagnée d'un logiciel de jeux, intitulé *Jeux2008*, téléchargeable séparément et gratuitement sur le site [www.conifere.be](http://www.conifere.be). Le jeu *Retournements* figurant sur ce CD est analysé ci-dessous.

## 1. Le jeu

La fiche 52 de la brochure *Enseignons en jouant* (page 97, fiche due à N. Lambelin) nous a inspiré le jeu décrit ci-dessous, qui se joue seul.

L'ordinateur engendre aléatoirement des configurations de pions, disposés soit en triangle, soit en carré, soit en pentagone. Ces trois possibilités correspondent à trois niveaux de jeu différents. Au départ, le joueur choisit le niveau. Dans tous les cas des pions sont placés aux sommets du polygone, ainsi qu'aux milieux des côtés. Dans le cas du carré et dans celui du pentagone, un pion supplémentaire est placé au centre du polygone.

Comme on peut le voir ci-contre, les pions peuvent être de deux couleurs différentes. Plus exactement, les deux faces de chaque pion sont de deux couleurs différentes, de sorte qu'ils changent de couleur quand on les retourne. Dans le logiciel, les couleurs utilisées sont *bleu* et *rouge*. Dans cette revue, elles sont *gris* et *bordeaux*.

Quel que soit le niveau choisi, des boutons-poussoirs permettent de retourner simultanément trois pions alignés sur un côté ou une médiane ou une diagonale. Nous dirons simplement « retourner un côté, une médiane, une diagonale ».

- Dans le cas du triangle, trois boutons-poussoirs sont disponibles. Chacun commande le retournement d'un côté du triangle.
- Dans le cas du carré, huit boutons-poussoirs sont disponibles : quatre d'entre eux pour retourner les côtés, deux pour retourner les médianes et deux pour retourner les diagonales.
- Dans le cas du pentagone, dix boutons-poussoirs sont disponibles : cinq pour retourner les côtés et cinq pour retourner les médianes (segments joignant les sommets aux milieux des côtés opposés).

Le jeu consiste à opérer des retournements (de trois pions à la fois selon les possibilités indiquées ci-dessus) de manière à faire apparaître l'une des configurations-cibles proposées sur la droite de l'écran.

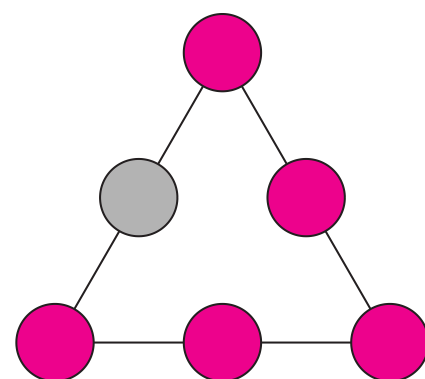


Fig. 1

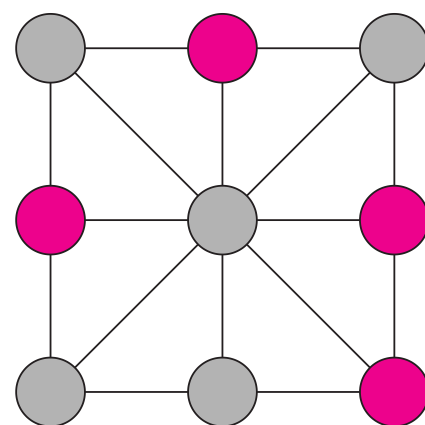


Fig. 2

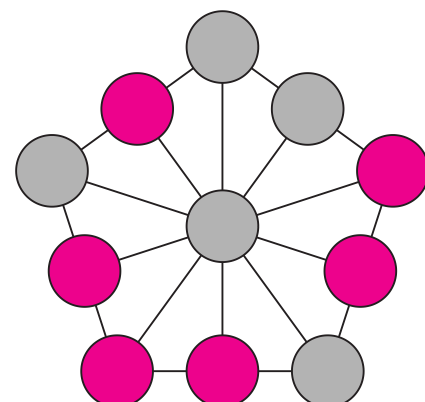
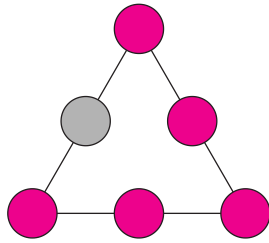


Fig. 3



## Cas du triangle

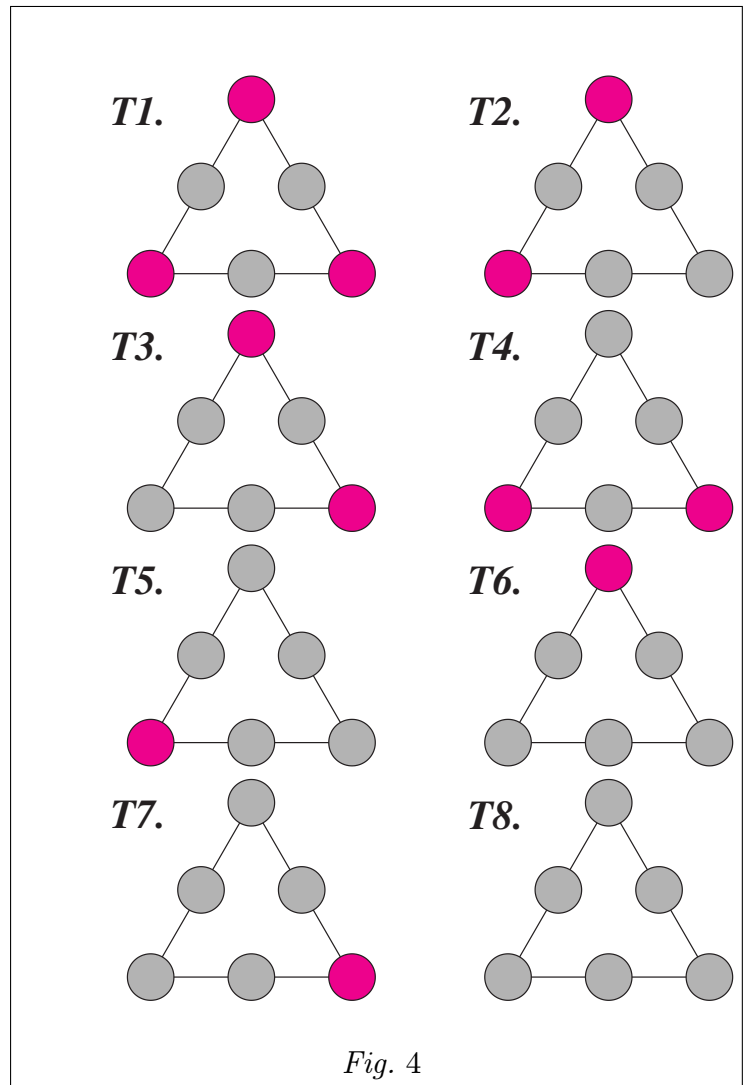


Pour le triangle, huit configurations-cibles sont proposées.

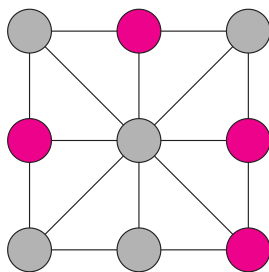
Il est généralement assez facile de trouver quels côtés doivent être retournés. Ainsi, dans le cas présent, en retournant le côté horizontal et le côté de droite, on obtient directement la configuration **T7**.

En fait, les huit configurations **T1** à **T8** ne se distinguent que par les couleurs des pions situés aux sommets. (Trois sommets pouvant avoir chacun deux couleurs, cela donne bien  $2^3$  possibilités.) Il suffit pour atteindre une de ces configurations de retourner les côtés dont le pion du milieu n'est pas gris.

Clairement, le joueur aura rapidement épuisé l'intérêt du niveau *Triangle*. Nous aurons cependant l'occasion d'en reparler dans les pages qui suivent.

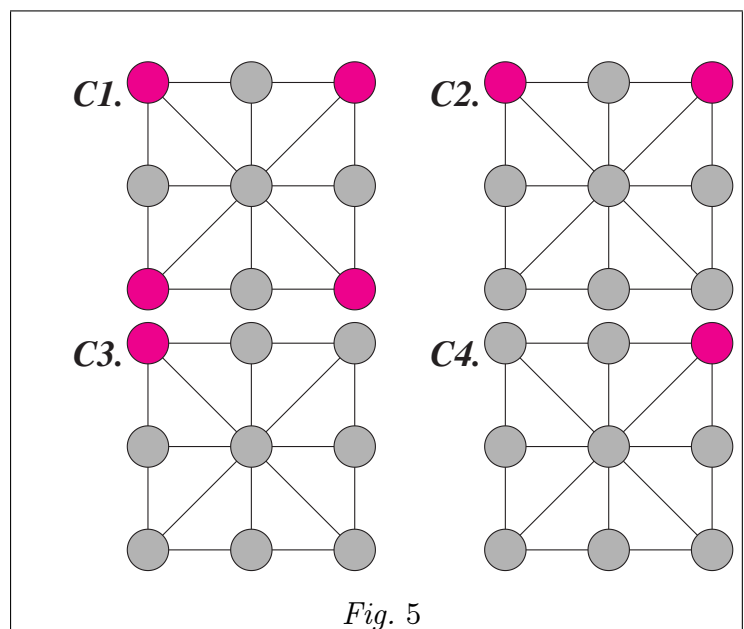


## Cas du carré



Pour le carré, quatre configurations-cibles sont proposées.

Comme pour le triangle, les pions situés aux milieux des côtés sont toujours gris. Il en est de même du pion situé au centre. On peut donc commencer par faire en sorte que ces conditions soient satisfaites.





## Cas du pentagone

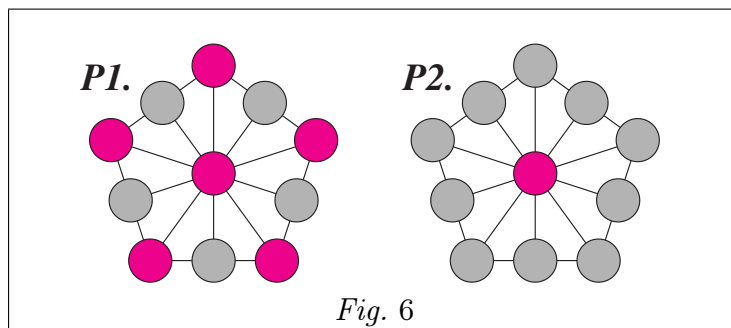
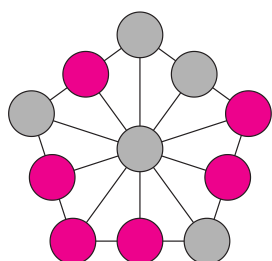


Fig. 6

Cette fois seulement deux configurations-cibles sont proposées. Les pions situés aux milieux des côtés sont toujours gris, celui situé au centre est toujours bordeaux. Les deux configurations se distinguent par les pions des sommets : tous bordeaux ou tous gris. Il est à conseiller d'entamer le jeu en retournant des côtés de façon que tous les pions situés en les milieux passent au gris. Il reste alors à s'occuper des sommets et du centre...

## 2. Un peu de mathématique

À la lecture de ce qui précède, des questions viennent inévitablement à l'esprit :

1. Pourquoi huit configurations-cibles dans le cas du triangle, quatre dans le cas du carré et deux dans celui du pentagone ?
2. Est-on sûr que n'importe quelle configuration engendrée aléatoirement par l'ordinateur permettra d'atteindre une des configurations-cibles ?
3. À partir d'une configuration engendrée aléatoirement, peut-on atteindre plus d'une configuration-cible ?

*Pour répondre à ces questions, nous devons donner des indications qui vont « tuer le jeu » en permettant d'élaborer une stratégie de résolution valable dans tous les cas. Peut-être souhaitez-vous essayer d'élaborer une telle stratégie par vous-même avant de lire ce qui suit... Précisons aussi que le texte de cette deuxième section n'est destiné qu'aux enseignants.*

Commençons par déterminer le nombre de configurations possibles dans chacun des trois niveaux. Si  $n$  pions sont utilisés, chacun pouvant être soit bordeaux, soit gris, on trouve immédiatement  $2^n$  possibilités. Le tableau ci-contre mentionne dans chacun des trois cas le nombre de configurations possibles. La dernière ligne indique le nombre de retournements disponibles pour chaque niveau.

	Tr.	Car.	Pent.
Pions	6	9	11
Config.	64	512	2048
Ret.	3	8	10

### 2.1. Quelques remarques générales

Pour fixer les idées, considérons le cas du triangle. Chaque côté peut être retourné. Numérotions les côtés de façon arbitraire, et notons  $c_1$ ,  $c_2$  et  $c_3$  les opérations « retourner le côté 1 », « retourner le côté 2 » et « retourner le côté 3 ».

À partir d'une configuration donnée, nous pouvons retourner autant de côtés que nous voulons. Une succession de retournements — nous dirons une *opération composée* — est donc une composée



d'un nombre fini de retournements, par exemple  $c_1 c_3 c_1 c_2 \dots c_n$ . Une opération composée d'un seul retournement sera aussi appelée une *opération élémentaire*.

Peut-être est-ce le moment de rappeler que la composition d'opérations est toujours associative. Dans le cas présent, elle est aussi commutative : retourner le côté 1 puis le côté 2 donne le même résultat que retourner d'abord le côté 2 puis le côté 1 : les pions communs aux deux côtés sont retournés deux fois, les autres une seule fois.

De plus, retourner deux fois le même côté revient à ne rien faire. Ainsi  $c_1^2 = c_2^2 = c_3^2$  : tous les carrés sont égaux à l'application identique, que nous noterons simplement 1.

Les constatations que nous venons de faire sont clairement valables aussi dans le cas du carré et dans celui du pentagone. Ainsi, dans les trois cas, triangle, carré, pentagone, la composition des opérations est *associative* et *commutative*, elle comporte un élément *neutre* (l'application identique) et chaque opération admet un *inverse* (elle-même). Autrement dit, l'ensemble des opérations est un *groupe commutatif* pour la composition des opérations.

Énumérons les opérations composées dans le cas du triangle : nous en trouvons huit : 1 (la composée de 0 facteur),  $c_1$ ,  $c_2$ ,  $c_3$ ,  $c_{12} = c_1 c_2$ ,  $c_{23} = c_2 c_3$ ,  $c_{13} = c_1 c_3$ ,  $c_{123} = c_1 c_2 c_3$ . Le nombre 8 provient aussi d'une puissance : dans une composée, chacun des trois facteurs possibles  $c_1$ ,  $c_2$  et  $c_3$  peut être présent ou absent.

D'une façon générale, si  $n$  opérations élémentaires sont disponibles, le nombre d'opérations composées est *a priori*  $2^n$  : dans une composée, chaque opération élémentaire peut être présente ou absente. Mais deux opérations composées de retournements différents pourraient retourner exactement les mêmes pions, donc être égales. Tout ce que nous pouvons dire est donc que le groupe des opérations composées comporte au maximum  $2^n$  éléments. Il pourrait en comporter moins. Nous rencontrerons une situation de ce genre dans le cas du carré.

## 2.2. Le cas du triangle

Dans ce cas, les huit opérations énumérées ci-dessus sont bien des opérations distinctes : il est facile de vérifier que quel que soit le choix de deux de ces opérations, on peut toujours trouver un pion retourné par l'une et non par l'autre.

**Pour la composition, l'ensemble des opérations,  $G_T = \{1, c_1, c_2, c_3, c_{12}, c_{23}, c_{13}, c_{123}\}$  est un groupe commutatif ayant huit éléments distincts.** À partir d'une configuration donnée, on peut donc en atteindre exactement 8 (y compris elle-même). Les 64 configurations possibles se répartissent ainsi en huit classes de huit éléments : deux configurations appartiennent à une même classe si et seulement si on peut passer de l'une à l'autre par une opération composée.

Ces huit classes sont celles des huit configurations-cibles **T1** à **T8**. En effet, aucune des opérations du groupe ne permet de transformer une des configurations-cibles en une autre, car toute opération retourne au moins un milieu de côté. De plus, on a déjà remarqué que toute configuration peut être transformée en l'une des configurations **T1** à **T8**. Notons que le choix d'une configuration-cible dans chacune des huit classes est tout à fait arbitraire.

	1	$c_1$	$c_2$	$c_3$	$c_{12}$	$c_{23}$	$c_{13}$	$c_{123}$
1	1	$c_1$	$c_2$	$c_3$	$c_{12}$	$c_{23}$	$c_{13}$	$c_{123}$
$c_1$	$c_1$	1	$c_{12}$	$c_{13}$	$c_2$	$c_{123}$	$c_3$	$c_{23}$
$c_2$	$c_2$	$c_{12}$	1	$c_{23}$	$c_1$	$c_3$	$c_{123}$	$c_{13}$
$c_3$	$c_3$	$c_{13}$	$c_{23}$	1	$c_{123}$	$c_2$	$c_1$	$c_{12}$
$c_{12}$	$c_{12}$	$c_2$	$c_1$	$c_{123}$	1	$c_{13}$	$c_{23}$	$c_3$
$c_{23}$	$c_{23}$	$c_{123}$	$c_3$	$c_2$	$c_{13}$	1	$c_{12}$	$c_1$
$c_{13}$	$c_{13}$	$c_3$	$c_{123}$	$c_3$	$c_{23}$	$c_{12}$	1	$c_2$
$c_{123}$	$c_{123}$	$c_{23}$	$c_{13}$	$c_{12}$	$c_3$	$c_1$	$c_2$	1

Le groupe  $G_T$ .



## 2.3. Le cas du pentagone

Deux configurations-cibles sont proposées. À première vue, elles diffèrent uniquement par la couleur des pions situés aux sommets. Mais la différence principale est plus subtile. Répartissons l'ensemble des pions en deux sous-ensembles. Dans le premier, nous plaçons les six pions situés aux sommets et au centre. Le second est constitué des cinq pions situés aux milieux des côtés.

$$S = \{s_1, s_2, s_3, s_4, s_5, s_6\} \quad Q = \{q_1, q_2, q_3, q_4, q_5\}$$

Dans la configuration-cible **P1**, les six éléments de  $S$  sont bordeaux : un nombre pair. Dans l'autre configuration-cible, **P2**, il n'y en a qu'un : un nombre impair. C'est cette différence de parité qui distingue principalement **P1** de **P2**. En effet, tout retournement, que ce soit d'un côté ou d'une médiane du pentagone, retourne exactement deux éléments de  $S$ . Il en résulte que la parité du nombre de pions de  $S$  qui sont bordeaux ne change pas. Automatiquement, toute composée de retournements respecte aussi la parité du nombre de pions de  $S$  qui sont bordeaux. Cette parité est un *invariant* du groupe  $G_P$  des opérations sur le pentagone.

Nous en tirons deux conclusions :

1. Il n'est pas possible de transformer la configuration-cible **P1** en l'autre configuration-cible **P2**.
2. Dès le début du jeu, le joueur peut trouver la cible à atteindre en déterminant la parité du nombre de pions bordeaux de  $S$ .

Il ne reste qu'une chose à montrer : qu'une de ces configurations-cibles peut toujours être atteinte. On cherchera à déterminer des suites de retournements ayant des effets particuliers. Par exemple, l'opération composée  $m_1m_2m_3m_4m_5$  qui retourne toutes les médianes a pour effet de retourner le centre cinq fois et tous les autres pions une fois. Il en résulte que tous les pions changent de couleur.

Nous aurons besoin de suites d'opérations élémentaires qui ne retournent aucun pion de  $Q$ . Les figures 8 à 10 en montrent des exemples importants. Les pions effectivement retournés sont montrés en noir, les autres sont en blanc.

On remarque en particulier la figure 10 qui montre une suite de retournements permettant de ne modifier qu'un sommet et le centre. Une stratégie efficace est alors claire (le lecteur pourra en trouver d'autres) :

1. Déterminer la cible à atteindre, ce qui indique la couleur que les pions situés aux sommets doivent avoir.
2. En retournant uniquement des côtés, faire en sorte que tous les pions appartenant à  $Q$  deviennent gris.
3. Retourner un à la fois les sommets qui n'ont pas la couleur déterminée en 1. Ne pas se préoccuper de la couleur du centre : vu l'invariance de parité, *in fine*, elle ne peut pas ne pas être bordeaux.

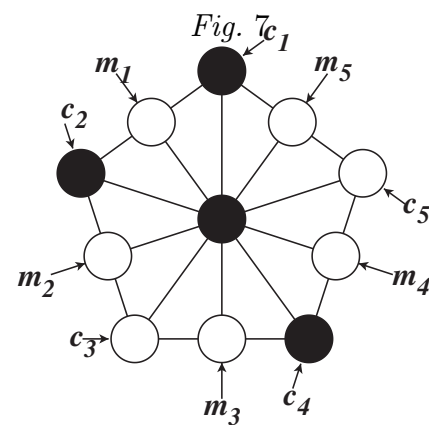
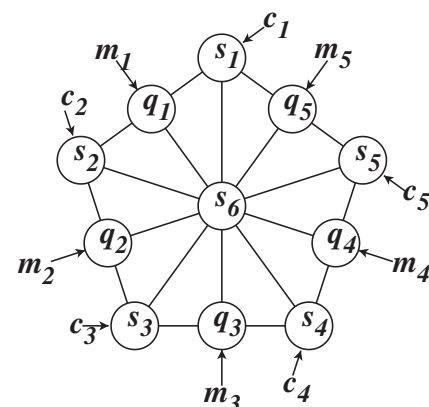


Fig. 7 : Résultat de  $c_1$

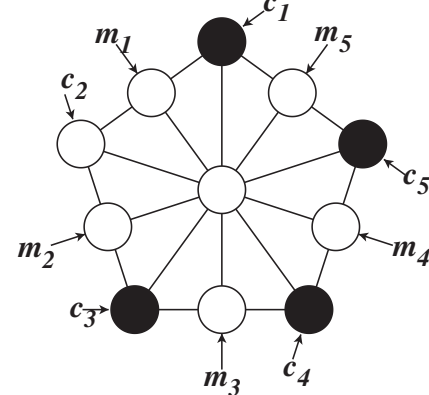


Fig. 8 : Résultat de  $c_1m_1$

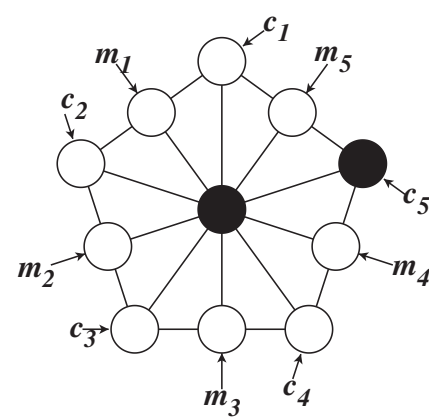


Fig. 9 : Résultat de  $c_1m_1c_2m_2$

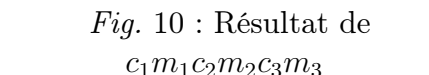


Fig. 10 : Résultat de  $c_1m_1c_2m_2c_3m_3$



Cette méthode montre que quelle que soit la configuration engendrée aléatoirement par l'ordinateur, il est possible par des retournements successifs d'atteindre une des deux configurations-cibles. On constate aussi que les 2048 configurations de pions possibles se répartissent en deux classes qui ont nécessairement le même nombre d'éléments, 1024. Ce nombre 1024 est aussi le nombre de composées possibles des 10 retournements  $c_1, \dots, c_5, m_1, \dots, m_5$  c'est-à-dire le nombre d'éléments du groupe  $G_P$  engendré par les 10 retournements.

## 2.4. Le cas du carré

Le cas du carré est plus compliqué. Pour commencer, dénombrons les opérations élémentaires (figure 11) :

- trois retournements  $h_1, h_2, h_3$  par rapport à des rangées horizontales ;
- trois retournements  $v_1, v_2, v_3$  par rapport à des rangées verticales ;
- deux retournements  $d_1, d_2$  par rapport aux diagonales.

Nous nommerons  $G_C$  le groupe des opérations correspondant à cette situation. À la différence de ce qui se passe pour le triangle, on trouve deux composées qui sont égales : tant  $h_1 h_2 h_3$  que  $v_1 v_2 v_3$  retournent *tous* les pions. Voilà qui complique les choses : une des opérations élémentaires est aussi une composée, par exemple  $v_3 = h_1 h_2 h_3 v_1 v_2$ . Autrement dit, les huit retournements ne sont pas des opérations *indépendantes*. Le nombre maximum d'opérations élémentaires *indépendantes* est 7.

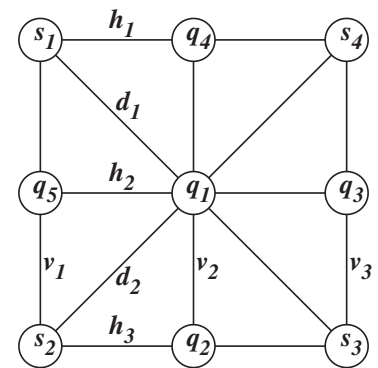


Fig. 11

Le groupe  $G_C$  ne contient donc pas  $2^8$  éléments, mais au maximum  $2^7$ . Nous disons « au maximum » car peut-être existe-t-il d'autres relations d'égalité entre des opérations composées, entraînant d'autres dépendances entre opérations élémentaires.

Puisque le groupe  $G_C$  contient au maximum  $2^7$  éléments une classe de configurations transformables les unes en les autres contient aussi au maximum  $2^7$  éléments. Or nous savons qu'il existe  $2^9$  configurations possibles des neuf pions. **Nous devons donc trouver au moins quatre ( $2^9/2^7$ ) classes de configurations.**

Mettons en évidence une propriété d'invariance de parité analogue à celle rencontrée dans le cas du pentagone : toute opération élémentaire, que ce soit le retournement d'un côté, d'une diagonale ou d'une médiane retourne un nombre pair de sommets (0 ou 2). Par conséquent, la parité du nombre de sommets d'une couleur donnée (par exemple bordeaux) ne change jamais. Or les configurations-cibles **C1** et **C2** présentent un nombre pair de sommets bordeaux, alors que **C3** et **C4** en présentent un nombre impair. Ainsi, nous pouvons déjà affirmer que **C1** n'est pas dans la même classe que **C3** ni que **C4**. Idem pour **C2**.

À la différence de ce qui se passe dans le cas du pentagone, le pion situé au centre du carré ne doit pas être associé aux sommets pour obtenir une invariance de parité. Les deux ensembles de pions à considérer sont donc cette fois

$$S = \{s_1, s_2, s_3, s_4\} \quad Q = \{q_1, q_2, q_3, q_4, q_5\}$$

Tout retournement conserve la parité du nombre de pions de  $S$  qui sont bordeaux, mais modifie la parité du nombre de pions de  $Q$  qui sont bordeaux.





## L'action sur les éléments de $Q$

Dans chacune des quatre configurations-cibles, les pions situés aux milieux des côtés et au centre sont gris. Il est donc normal de chercher à réaliser d'abord cette caractéristique, ce qui peut être aisément réalisé de plusieurs façons. Par exemple, si un milieu de côté est bordeaux, on retourne le côté; si le centre est bordeaux, on retourne une diagonale. Au cours de cette opération, on ne se préoccupe pas des sommets. On atteint ainsi une configuration où seuls les quatre sommets peuvent être de couleurs variées. Nous n'avons donc plus à considérer que 16 configurations différentes.

## L'action sur les sommets

Il reste à trouver des opérations composées qui retournent des sommets *sans retourner aucun élément de  $Q$* . Les figures 12 à 14 en montrent 3. Avec l'application identique, cela nous en fait 4.

Ces quatre opérations suffisent à transformer une des seize configurations mentionnées en une des quatre configurations-cibles :

1. Si les quatre pions de  $S$  ont même couleur, ou bien on ne fait rien (application identique), ou bien on les retourne tous (fig. 12). On arrive à **C1**.
2. Si trois pions sont d'une même couleur, on peut supposer que celle-ci est le bordeaux (sinon, on retourne les quatre sommets). En utilisant les opérations des figures 13 et/ou 14, on réalise alors une des configurations **C3**, **C4**.
3. Si deux pions sont bordeaux et deux sont gris, il existe deux possibilités :
  - les deux pions bordeaux occupent des sommets adjacents : les opérations des figures 13 et/ou 14 permettent d'atteindre la configuration-cible **C2**.
  - les deux sommets bordeaux sont situés sur une diagonale : il suffit alors d'une des opérations des figures 13, 14 pour atteindre la configuration **C1**.

Toute configuration engendrée aléatoirement peut donc être ramenée à l'une des quatre configurations-cibles, ce qui implique qu'il existe *au maximum* quatre classes de configurations. Or nous savions déjà qu'il en existait *au moins quatre*. Donc il en existe *exactement quatre*. Ceci prouve indirectement qu'il est impossible de transformer **C1** en **C2** ou **C3** en **C4** : sinon, il n'y aurait que deux classes. Une démonstration directe nécessiterait de prouver l'inexistence d'une opération composée qui retourne deux sommets voisins sans retourner aucun autre pion, ou encore de prouver que les quatre opérations 1,  $h_1h_3v_2d_1$ ,  $h_1h_3v_2d_2$  et  $d_1d_2$  sont les seules qui ne retournent aucun élément de  $Q$ .

La démonstration indirecte, tout en étant parfaitement rigoureuse, permet d'éviter le travail combinatoire fastidieux. On en déduit également que le groupe  $G_C$  contient exactement  $2^7$  éléments. Il n'existe donc pas d'autres relations entre les opérations élémentaires que la relation  $h_1h_2h_3 = v_1v_2v_3$  et celles qui lui sont équivalentes.

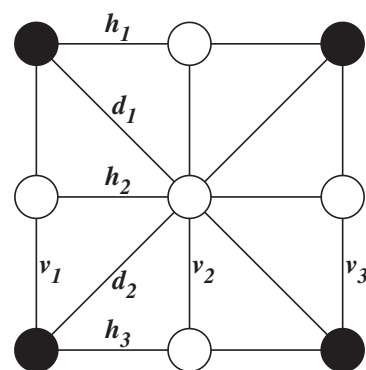


Fig. 12 : Résultat de  $d_1d_2$

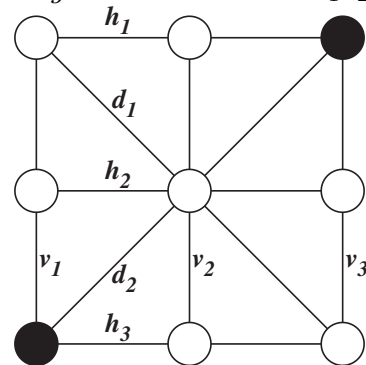


Fig. 13 : Résultat de  $h_1h_3v_2d_1$

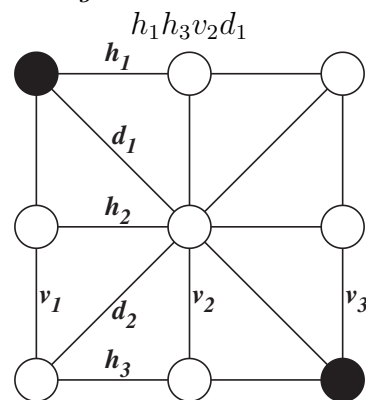


Fig. 14 : Résultat de  $h_1h_3v_2d_2$



### 3. Y a-t-il des élèves dans la classe ?

Une situation telle que celle que nous venons de rencontrer peut-elle être exploitée dans une classe ? Clairement, il n'y a pas de réponse unique à cette question, donc pas de *bonne réponse*. Tout dépend de l'enseignant, de son style d'enseignement, de son désir de s'écarter des sentiers battus, des élèves, de leurs connaissances, de leur motivation, des circonstances, du temps disponible. . .

Essayons cependant de préciser quelques caractéristiques de la situation.

1. La situation considérée ne se rapporte à aucun point particulier du programme. Il ne faut donc certainement pas l'envisager sous l'angle *institutionnalisation de connaissances*, et encore moins l'utiliser pour effectuer une quelconque *évaluation* des élèves.
2. La situation n'est cependant pas sans rapport avec les considérations générales accompagnant les programmes du troisième degré de l'enseignement général et technique de transition<sup>(1)</sup>. Par exemple :
  - traduire une information d'un langage dans un autre, par exemple passer du langage courant au langage graphique ou algébrique et réciproquement,
  - observer à partir des acquis antérieurs et en fonction du but à atteindre,
  - formuler une conjecture, dégager une méthode de travail,
  - rassembler des arguments et les organiser en une chaîne déductive,
  - choisir une procédure adéquate et la mener à son terme.
3. Même limitée à son aspect de jeu, la situation considérée rencontre cette liste de compétences. Il ne s'agit en effet pas de jouer « au hasard », en retournant des rangées de pions un peu n'importe comment. Il s'agit bien au contraire d'*élaborer une stratégie* permettant d'atteindre l'une des configurations-cibles. Cela nécessite une bonne observation des manipulations élémentaires et leur traduction éventuelle dans un langage symbolique ou graphique. Il faut aussi imaginer les phases successives de la stratégie cherchée. À l'époque de la *rubikomania*, bien des enfants ont fait la preuve de

leur capacité à maîtriser une situation nettement plus compliquée que celle-ci.

C'est bien là une activité mathématique, même si elle ne se concrétise pas par de nouveaux énoncés de théorèmes.

4. L'enseignant peut très bien proposer l'activité de jeu à ses élèves sans aller plus loin. Une synthèse éventuelle pourrait comporter
  - la constatation que dans tous les cas, il n'est pas difficile de rendre gris les milieux des côtés. Dans le cas du carré, on peut aussi rendre le centre gris en même temps que les milieux. Le nombre de configurations à considérer en pratique est donc 8, ( $2^3$ ), pour le triangle, 64, ( $2^6$ ), pour le pentagone et 16, ( $2^4$ ), pour le carré.
  - l'énumération des opérations laissant invariants les milieux des côtés (et le centre dans le cas du carré) :
    - aucune pour le triangle. Les huit configurations « à milieux gris » déterminent donc huit classes différentes.
    - trente-deux pour le pentagone : toutes les composées des cinq paires du type  $c_i m_i$ . Les soixante-quatre configurations se répartissent donc en deux classes.
    - quatre pour le carré : 1,  $d_1 d_2$ ,  $h_1 h_3 v_2 d_1$  et  $h_1 h_3 v_2 d_2$ . Les seize configurations se répartissent donc en quatre classes.
5. À la section 2, nous avons dépassé le stade du jeu. En vue de justifier la pertinence des configurations-cibles proposées par l'ordinateur, nous nous sommes exprimé en termes de *groupe* d'opérations, une notion qui apparaît furtivement dans le programme des cours à 6 h, sous forme d'un commentaire : *Au travers de différents points de matières vues, et à titre de synthèse, on dégagera certaines structures communes, par exemple la notion de groupe*. On peut se demander s'il est très utile de dégager la notion de groupe en tant que synthèse si ensuite on ne l'utilise pas comme outil dans l'étude d'autres situations, sans pour autant développer un *cours de théorie des groupes*. De même que les groupes de transformations en géométrie, les groupes d'opérations qui apparaissent dans la situation de ce jeu peuvent servir de cadre au raisonnement.

G. Noël est professeur honoraire de l'Université de Mons-Hainaut ; ✉ [guy@conifere.be](mailto:guy@conifere.be).

<sup>(1)</sup> Nous nous référons ici au document 40/2000/240, publié par le Ministère de l'Éducation et intitulé PROGRAMME D'ÉTUDES DU COURS DE MATHÉMATIQUES, (Formation optionnelle obligatoire : 6, 4 ou 2 périodes). Ce document concerne l'enseignement organisé par la Communauté Française.